

**D'un multiple conditionnel en assurance de portefeuille :
CAViaR pour les gestionnaires ?**

Benjamin HAMIDI, Emmanuel JURCZENKO, Bertrand MAILLET

2009.33



**« D'un multiple conditionnel en assurance de portefeuille :
CAViaR pour les gestionnaires ? »**

Résumé court

Dans le cadre de l'assurance de portefeuille à coussin, le multiple garantit une exposition constante au risque. Nous proposons une méthode alternative d'estimation conditionnelle de ce multiple, basée sur une modélisation dynamique du centile et la méthode de régression sur quantile.

Après avoir estimé différentes versions de notre modèle sur le marché des actions américaines, nous comparons les performances relatives des portefeuilles gérés avec des multiples conditionnels et inconditionnels.

Short Abstract

In a Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) framework, a constant risk exposure is defined by the multiple of the strategy. This article proposes an alternative conditional multiple estimation model, which is based on an autoregressive quantile regression dynamic approach.

We estimate several specifications of the conditional multiple model on the American equity market, and we compare relative performances of cushioned portfolios using conditional and unconditional multiples.

**« D'un multiple conditionnel en assurance de portefeuille :
CAViaR pour les gestionnaires ? »^{*}**

Benjamin Hamidi[♦] Emmanuel Jurczenko^{♦♦} Bertrand Maillet^{♦♦♦}

- Mai 2009 -

Résumé

La méthode d'assurance de portefeuille à coussin (*Cf.* Black et Jones, 1987, Perold et Sharpe, 1988) consiste en une allocation dynamique entre un actif risqué et un actif sans risque, de façon à conserver une part constante d'exposition au risque. La structure asymétrique des performances induites par ce mode de gestion repose sur la détermination d'un paramètre essentiel : le multiple-cible. Différentes méthodes d'estimation du multiple ont été proposées dans la littérature. Parmi celles-ci on peut distinguer d'une part les méthodes d'estimation inconditionnelles basées soit sur la chute maximale historique des cours boursiers, soit sur la théorie des valeurs extrêmes, et d'autre part les méthodes d'estimation conditionnelles basées sur une modélisation autorégressive particulière de la volatilité et de variables retardées. Malgré leur utilisation fréquente en finance, ces différentes approches souffrent pourtant de nombreux défauts.

En suivant les approches de Chernozhukov et Umanstev (2001), et d'Engle et Manganelli (2004), nous proposons dans cet article une méthode d'estimation conditionnelle alternative, basée sur une modélisation dynamique du centile et la méthode de régression sur quantile (*Cf.* Gouriéroux et Jasiak, 2008).

Après avoir estimé différentes versions de notre modèle sur le marché des actions américaines, nous comparons les performances relatives des portefeuilles gérés avec des multiples conditionnels et celles issues des multiples inconditionnels traditionnels. Si les méthodes classiques d'assurance de portefeuille peuvent atténuer fortement l'impact de certaines des configurations de marché baissières observées, l'approche d'assurance de portefeuille à multiple conditionnel apparaît, sur notre période de test, moins coûteuse en terme de rendement, mais aussi en terme de rendement par unité de risque.

Mots clefs : assurance de portefeuille, CPPI, valeurs extrêmes, régression sur quantile.

Classification JEL : G11, C13, C14, C22, C32.

^{*} Nous remercions Thierry Chauveau, Thierry Michel, Paul Merlin, Jean-Philippe Médecin et Jean-Luc Prigent pour leur aide, leurs encouragements et leurs conseils. Le troisième auteur remercie l'Institut Europlace de Finance pour son soutien financier. Nos remerciements vont aussi aux participants des conférences internationales des Journées de Micro-économie Appliquée (Nantes, 2006), de la Journée d'Econométrie Financière Avancée (Paris, 2006) et de la conférence de l'AFFI (Bordeaux, 2007). Nous remercions également les deux rapporteurs anonymes, pour leurs commentaires et suggestions, qui ont conduit à améliorer significativement cette version de l'article. L'avertissement habituel est de rigueur.

[♦] A.A.Advisors-QCG (ABN AMRO), Variances et Université Paris-1 (CES/CNRS). Courriel : benjamin.hamidi1@malix.univ-paris1.fr

^{♦♦} ESCP-EAP. Courriel : ejurczenko@escp-eap.net.

^{♦♦♦} A.A.Advisors-QCG (ABN AMRO), Variances et Université Paris-1 (CES/CNRS et IEF). Correspondance à : B. Maillet, MSE, CES/CNRS, 106-112 Bd de l'Hôpital F-75647 Paris Cedex 13. Tél/fax : 0144078263/70. Courriel : bmaillet@univ-paris1.fr.

« D'un multiple conditionnel en assurance de portefeuille :

CAViaR pour les gestionnaires ? »

1. Introduction

La méthode d'assurance de portefeuille à coussin - introduite par Black et Jones (1987) et Perold et Sharpe (1988) - est une stratégie d'allocation dynamique entre un actif risqué et un actif sans risque, de façon à conserver une part constante d'exposition au risque. Le portefeuille ainsi couvert profite d'une partie des hausses du marché tout en étant théoriquement protégé contre des baisses importantes par un niveau de capital plancher prédéterminé. L'investisseur limite ainsi son risque à la baisse et participe, dans une certaine proportion, à la hausse du marché.

La structure de performance asymétrique des portefeuilles ainsi gérés repose en grande partie sur la détermination d'un paramètre essentiel qui définit l'exposition du portefeuille au risque : le multiple cible. Ce dernier s'interprète comme l'inverse de la chute potentielle maximale de la composante risquée que peut subir le portefeuille assuré sur une journée de bourse, sans entamer la garantie de capital initial (Cf. Black et Perold, 1992 ; Poncet et Portait, 1997 ; Prigent, 2001 ; Bertrand et Prigent, 2002 et 2005). Plus le multiple est élevé, plus la participation aux hausses de marchés est forte, en contrepartie, le risque de crever le plancher est plus important *ceteris paribus*.

Différentes méthodes d'estimation ont été proposées dans la littérature afin de déterminer le multiple-cible de la gestion à coussin. Parmi celles-ci on peut distinguer, d'une part les méthodes d'estimation inconditionnelles fondées sur la chute maximale historique des cours boursiers (Cf. Black et Jones, 1987), sur la théorie des valeurs extrêmes (Cf. Bertrand et Prigent, 2002) ; et d'autre part celles reposant sur une modélisation autorégressive particulière de la volatilité du marché et l'observation de variables prédictives (Cf. Chen et Chang, 2005).

Malgré leur utilisation fréquente, la plupart de ces approches souffrent cependant de nombreux défauts. Elles s'appuient en effet sur une modélisation directe de la distribution de probabilité (in)conditionnelle des rentabilités de l'actif risqué et elles reposent sur des hypothèses statistiques fortes telles que la normalité ou l'hypothèse que les rentabilités boursières sont Identiquement et Indépendamment Distribuées (Cf. Kouretas et Zarangas, 2005).

Suivant les approches développées par Chernozhukov et Umanstev (2001) et Engle et Manganelli (2004) dans le cadre des modèles de Valeur-à-Risque (*VaR*), nous proposons dans cet article une nouvelle méthode d'estimation conditionnelle du multiple plus générale, basée sur une modélisation du centile utilisant la méthode de régression sur quantile.

D'un point de vue théorique, la demande d'assurance de portefeuille s'explique aussi bien dans le cadre de la maximisation de l'espérance d'utilité (Basak, 1995 et 2002) que dans celui de la théorie des perspectives de Kahneman et Tversky (1979) avec des agents présentant de l'aversion pour les pertes (Berkelaar *et alii*, 2004 ; Gomes, 2005). L'assurance de portefeuille à coussin est optimale quand l'investisseur a une aversion pour le risque décroissante (Kingston, 1989). La demande pour l'assurance de portefeuille peut ainsi directement être reliée à l'aversion au risque. Les agents ayant une aversion pour le risque variable (*Cf.* Jackson *et alii*, 1972 ; Campbell, 1999 ; Li, 2007 ; Coudert et Gex, 2008), il nous semble intéressant d'adapter le cadre traditionnel de l'assurance de portefeuille dans un cadre lui aussi variable, qui autoriserait par exemple un comportement contra-cyclique de la prise de risque. La détermination du multiple conditionnel en fonction du centile est aussi justifiée par son interprétation en termes de *VaR* (considérée désormais comme un indicateur de risque de référence) et par les travaux sur l'allocation de portefeuille sous contrainte de perte et la notion de perte « désastre » qui leur sont liées (Roy, 1952 ; Leibowitz et Kogelman, 1991 ; Lucas et Klaassen, 1998). Dans le cadre de l'assurance de portefeuille, nous proposons ainsi de réduire la *VaR ex ante* d'un portefeuille, en agissant sur le multiple : en le réduisant quand celle-ci a tendance à trop augmenter et, inversement, en augmentant le levier quand les marchés sont calmes. L'établissement du multiple conditionnel s'inspire ainsi des pratiques usuelles de gestion des risques et de contrôle classique en *VaR*. Ancrant notre démarche sur ces différents travaux, nous définissons donc notre allocation en actif risqué en fonction d'un multiple conditionnel déterminé à partir du niveau de perte « désastre » estimé à l'aide de la *VaR*. Le multiple permet ainsi de faire varier la couverture en fonction de cet indicateur de risque. Les gestionnaires visent dans cette perspective une exposition constante au risque, telle que définie par la *VaR*.

Afin d'illustrer l'intérêt de cette nouvelle approche, nous évaluons dans cet article les performances de portefeuilles déterminés par différentes spécifications conditionnelles et inconditionnelles du multiple cible. Notre analyse porte sur un portefeuille géré en coussin et investi pour sa part risquée dans l'indice *ScP500*. Nous étudions en particulier les performances de quatre spécifications autorégressives particulières pour le centile conditionnel¹, ainsi que trois versions avancées². Notre échantillon est composé des rentabilités journalières de l'indice

¹ Le centile conditionnel est estimé à partir d'un « modèle adaptatif », d'un « modèle à valeur absolue symétrique », d'un « modèle à pente asymétrique », et d'un modèle de type « *Indirect GARCH(1,1)* ».

² Les trois versions avancées sont fondées sur l'observation de variables exogènes retardées spécifiques.

SP500 observées³ entre le 4 janvier 1993 et le 16 janvier 2008. Nous réalisons également un *backtest* étendu de la méthode retenue sur l'indice *Dow Jones* depuis janvier 1937.

Si les méthodes classiques d'assurance de portefeuille peuvent atténuer fortement certaines des configurations de marché baissières observées, notre approche d'assurance de portefeuille à multiple conditionnel apparaît cependant sur notre période de test moins coûteuse en terme de rendement et de risque.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous présentons le cadre général de la gestion en coussin. La section 3 analyse la méthode d'établissement d'un multiple cible variable déterminé par la régression sur quantile, ainsi que les quatre spécifications autorégressives du centile utilisées. Nous comparons, dans la section 4, les performances obtenues par notre méthodologie conditionnelle sur le marché des actions américaines avec celles issues des principales méthodes de détermination inconditionnelles du multiple cible. La section 5 présente nos conclusions.

2. Cadre général de la gestion en coussin

La gestion en coussin suit au cours du temps une stratégie d'allocation dynamique de portefeuille. Le plancher, noté F_t , est la valeur *minimale* du portefeuille acceptable pour l'investisseur à l'échéance. La valeur du portefeuille couvert, notée V_t , est investie dans un actif risqué et un actif sans risque. Il s'agit alors de faire varier au cours du temps la proportion investie dans l'actif risqué, par rapport à l'encours placé en actif sans risque, afin d'assurer à tout moment le plancher garanti contractuellement. Ainsi, même en cas de baisse continue du marché sur l'horizon d'investissement, noté T , le portefeuille conservera à l'échéance une valeur au moins égale au plancher (*i.e.* un pourcentage pré-établi du capital versé à l'origine). La valeur théorique finale garantie ne peut être évidemment supérieure à la valeur investie initialement capitalisée au taux sans risque, notée $V_0 \text{Exp}(rT)$. Le coussin, noté c_t , est défini comme l'écart variable dans le temps, entre la valeur du portefeuille et celle du plancher garanti, soit :

$$c_t = V_t - F_t \quad (1)$$

Le coussin est donc le montant théorique *maximum* que l'on peut perdre sur une période sans entamer la garantie du capital.

Le rapport entre l'actif risqué et le coussin, correspond, à tout moment, au multiple cible, noté m_t . On détermine alors la somme placée en actif risqué en multipliant le coussin par ce multiple. Le multiple reflète l'exposition *maximale* du portefeuille. La stratégie de gestion à coussin vise

³ Les données nécessaires à nos estimations ne sont pas renseignées en totalité avant cette date.

ainsi à conserver une proportion constante d'exposition au risque. La position en actifs risqués, notée e_t , doit donc être proportionnelle au coussin. Cette position s'écrit alors :

$$e_t = m_t \times c_t. \quad (2)$$

Les cours fluctuant, le multiple de gestion courant s'écarte constamment de sa valeur cible, c'est pourquoi on choisit un troisième paramètre, la tolérance, notée τ , qui appliquée au multiple permet de déterminer le réajustement du portefeuille. Si à la suite de la fluctuation de la valeur de l'actif risqué, le multiple résultant de la position, noté m_t^* , s'écarte de sa valeur cible d'un pourcentage supérieur à la tolérance, il y aura ajustement (et donc frais de transaction). Ainsi, $\forall t \in [0, \dots, T]$:

$$m_t^* \in [m_t \times (1 - \tau), m_t \times (1 + \tau)]. \quad (3)$$

Le problème principal de la gestion à coussin réside donc dans la détermination du multiple cible m_t . En effet, en cas de baisse continue de l'actif risqué, la valeur du coussin restant toujours par définition supérieure ou égale à zéro, le portefeuille suivant la méthode du coussin aura une valeur qui, en théorie, restera supérieure ou égale au plancher. Néanmoins, les transactions ne s'effectuant pas en continu, en cas de chute brutale des cours de l'actif risqué sous-jacent, le coussin ne permettra d'absorber, si le gérant n'a pas eu le temps de réajuster son portefeuille, qu'une baisse inférieure ou égale à l'inverse de la limite supérieure du multiple.

3. Etablissement d'un multiple cible conditionnel par la méthode de régression sur quantile

Le multiple cible s'interprète comme l'inverse de la perte *maximale* que peut subir, sur une période unitaire, le portefeuille couvert avant re-balancement de sa composante risquée. Notre objectif est d'établir une nouvelle méthode d'estimation conditionnelle du multiple cible dans le cadre d'une gestion de portefeuille à coussin⁴.

Pour cela nous utilisons une approche de couverture par quantile similaire à celle de la Valeur-à-Risque conditionnelle⁵. Dans ce cadre de couverture probabiliste, le multiple peut-être estimé par l'inverse du premier centile conditionnel de la distribution des rendements boursiers, augmenté

⁴ En pratique, le gérant (pour différentes raisons : diminution des coûts de transaction, exposition *maximale*, contraintes opérationnelles...) choisit souvent de manière discrétionnaire un multiple de gestion inférieur ou égal à la borne haute du multiple définie par un modèle, par des *stress tests* ou par une structure de garantie tierce partie (Cf. Poncet et Portait, 1997). Dans cet article et à des fins d'évaluation, nous avons choisi de suivre une politique systématique : le multiple conditionnel est ainsi déterminé pour conserver une exposition constante au risque défini par la VaR.

⁵ Cette approche a été proposée initialement dans le cadre de la gestion à multiple constant (Cf. Bertrand et Prigent, 2005).

du α -ième quantile de l'excédent du rendement par rapport à ce centile, noté $Q_t(\alpha)$. Le multiple cible peut alors s'écrire formellement comme :

$$m_t = |C_t(r_t; \beta_t) + Q_t(\alpha)|^{-1} \quad (4)$$

avec :

$$C_t(r_t; \beta_t) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \times C_{t-1}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) + \sum_{i=2}^p \beta_{i,t} \times l(x_t)$$

où $C_t(r_t; \beta_t)$ est le premier centile de la distribution conditionnelle des rendements quotidiens du sous-jacent risqué, r_t correspond au rendement périodique de la part risquée du portefeuille couvert en t , β_t est le vecteur de dimension $(p+1)$ des paramètres inconnus $\beta_{i,t}$ de la fonction de centile conditionnel, x_t sont les composantes du vecteur des $(p-1)$ variables explicatives, $l(\cdot)$ est l'opérateur de retard d'ordre 1, et $Q_t(\alpha)$ représente le quantile du rendement en excès observé en cas de dépassement du centile conditionnel. La présence de terme autorégressif et des variables exogènes x_t dans l'expression de $C_t(r_t; \beta_t)$ permet ainsi d'adapter la valeur du centile au cours du temps.

La chute potentielle *maximale* de l'actif risqué est donc estimée à chaque période en ajoutant au premier centile conditionnel estimé, le quantile du rendement supplémentaire observé en cas de dépassement de ce dernier. Il est noté $Q_t(\alpha)$, et il est calculé sur la période d'estimation par :

$$\hat{Q}_t(\alpha) = \min_{t=[1, \dots, \Gamma]} [r_t - C_t(r_{t-1}; \beta_t)] \quad (5)$$

où $C_t(r_{t-1}; \beta_t)$ est le centile des rendements de l'actif risqué estimé par le modèle conditionnel considéré en t , et Γ est le nombre total d'observations dans la période d'estimation, avec $t = [1, \dots, \Gamma] \subset [1, \dots, T]$.

Suivant Engle et Manganelli (2004), nous utilisons comme variable retardée du modèle général le dernier rendement connu au moment de la détermination du multiple⁶.

Nous considérons également quatre spécifications autorégressives particulières pour la modélisation du multiple-cible conditionnel. La première spécification correspond à un modèle adaptatif et s'écrit :

$$C_{At}(r_t; \beta_{t,t}) = C_{At-1}(r_{t-1}; \beta_{t-1,t-1}) + \beta_{t,t} [1 + \exp(0.5 \times [r_{t-1} - C_{At-1}(r_{t-1}; \beta_{t-1,t-1})])]^{-1} - 0.01 \quad (6)$$

⁶ Un rendement anormalement négatif pouvant signaler le début d'une période de turbulence sur le marché, on s'attend à ce que le multiple conditionnel diminue lorsque le dernier rendement connu est négatif et augmente lorsque celui-ci est positif. L'effet de la variation du rendement de l'actif risqué affecte asymétriquement le multiple-cible.

où r_{t-1} correspond au rendement de la part risquée du portefeuille garanti sur la période précédente. L'intuition de cette spécification est la suivante. Tant que le rendement quotidien n'est pas inférieur à l'estimation du premier centile, le multiple conditionnel peut croître d'un faible montant, ce qui permet de profiter au mieux des hausses potentielles de la part risquée du portefeuille assuré. A l'inverse, lorsque le premier centile est dépassé, le multiple variable doit diminuer, ce qui permet de se protéger contre des baisses de l'actif risqué de plus en plus importantes. Ce modèle s'adapte à ses erreurs, ce qui permet de réduire la probabilité que l'on sous-estime de manière répétée et successive le multiple-cible, mais cela ne garantit néanmoins en rien que le multiple ne soit pas surestimé.

La deuxième spécification correspond à un modèle à valeur absolue symétrique. Sa formulation est donnée par :

$$C_{SVA_t}(r_t; \beta_t) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times C_{SVA_{t-1}}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) + \beta_{3,t} \times |r_{t-1}|. \quad (7)$$

Dans ce modèle, le multiple conditionnel réagit symétriquement aux rendements passés de l'actif sous-jacent, qu'ils soient négatifs ou positifs.

Le modèle à pente asymétrique constitue la troisième spécification utilisée pour estimer la forme fonctionnelle du multiple conditionnel. Ce dernier s'écrit comme :

$$C_{PA_t}(r_t; \beta_t) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times C_{PA_{t-1}}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) + \beta_{3,t} \times r_{t-1}^+ + \beta_{4,t} \times r_{t-1}^- \quad (8)$$

où :

$$\begin{cases} r_{t-1}^+ = \max(0, r_{t-1}) \\ r_{t-1}^- = -\min(0, r_{t-1}). \end{cases}$$

Il permet de faire varier le multiple conditionnel différemment selon le niveau des rendements positifs et négatifs constatés.

La quatrième et dernière spécification autorégressive retenue dans cette étude correspond à un modèle de type « *Indirect GARCH(1,1)* ». Son expression algébrique est de la forme :

$$C_{IG_t}(r_t; \beta_t) = \left\{ \left[\beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times C_{IG_{t-1}}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) \right]^2 + \beta_{3,t} \times r_{t-1}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Cette modélisation est correctement spécifiée si les données sous-jacentes sont issues d'un modèle *GARCH* (1,1) avec un résidu Identiquement et Indépendamment Distribué⁷.

Afin d'améliorer la qualité de l'estimation du multiple conditionnel, nous proposons par ailleurs trois extensions pour chacune des spécifications autorégressives, basées sur l'ajout successif des variables exogènes retardées suivantes : le rapport entre le cours le plus haut et le

⁷ Cf. Engle et Bollerslev (1986).

cours le plus bas de la journée (*range*), la volatilité implicite de l'actif risqué et le volume de titres échangés au cours des derniers jours.

Nous avons ainsi choisi de lier le niveau du multiple conditionnel à des indicateurs avancés de l'évolution du marché disponibles pour la majorité des titres cotés. Ainsi, le *range* est calculé grâce aux *maxima* de la journée ; il est traditionnellement considéré comme un meilleur estimateur de la volatilité que la volatilité empirique simple classique utilisée couramment (Cf. Parkinson, 1980) car il repose sur des caractéristiques importantes du « vrai » processus de prix (plus haut et plus bas de la journée de cotations), plutôt que sur des références arbitraires en temps calendaire (cours de clôture). La volatilité implicite extraite du marché des options est aussi un indicateur avancé classique de la turbulence du marché et de sa volatilité instantanée (Corrado et Miller, 2005) ; elle possède un certain caractère prédictif sur la volatilité réalisée future. Enfin, le volume des titres échangés dans la journée apporte quant à lui une indication utile sur l'information circulant effectivement sur le marché (Cf. Clark, 1973)⁸. Nous appelons les multiples conditionnels ainsi estimés les « Multiples Conditionnels Avancés ».

Pour chaque spécification autorégressive retenue, les paramètres du modèle de multiple variable sont estimés à partir de la méthode de régression sur quantile⁹. Les paramètres du premier centile conditionnel sont ainsi obtenus comme solution du programme d'optimisation suivant :

$$\beta_t^* = \underset{\beta_t \in \mathbb{R}^n}{\text{ArgMin}} \{RQ(\beta_t)\} \quad (10)$$

avec :

$$RQ(\beta_t) = \sum_{t=1}^T \{ [0,01 - I_{\{r_t < C_t(r_t; \beta_t)\}}] \times [r_t - C_t(r_t; \beta_t)] \}$$

où $RQ(\cdot)$ est la fonction objectif de la régression par quantile ; β_t est le vecteur de dimension n des paramètres inconnus de la fonction de centile conditionnel ; $I_{\{\cdot\}}$ représente la fonction indicatrice et $C_t(\cdot)$ correspond à une spécification autorégressive particulière du premier centile conditionnel des rendements du sous-jacent risqué à la date t - Cf. équations (6), (7), (8) et (9).

Dans la partie suivante, nous analysons les estimations des spécifications conditionnelles précédentes sur le marché des actions américaines. Nous comparons ensuite les performances relatives des portefeuilles gérés avec des multiples conditionnels et inconditionnels.

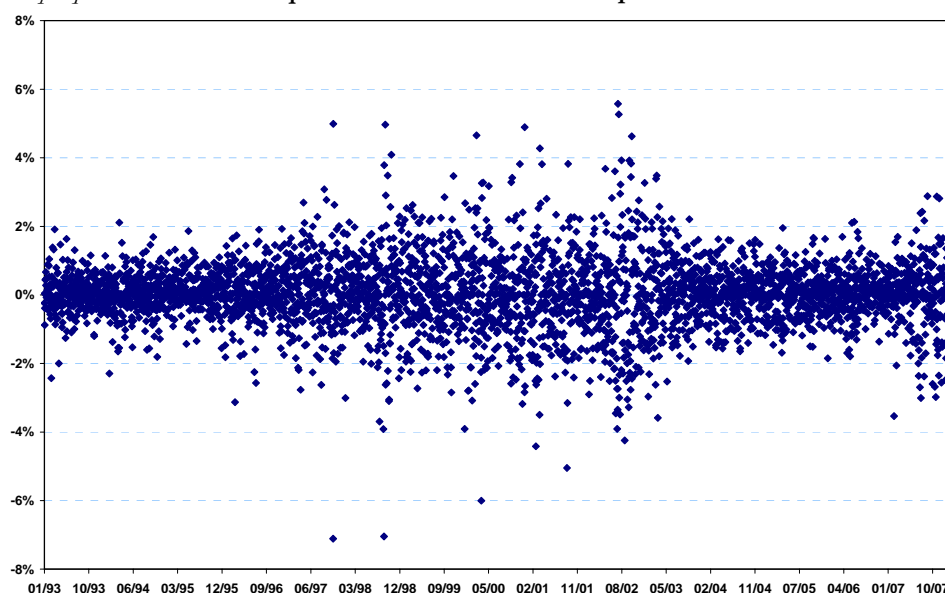
⁸ Nous renvoyons à l'article de Clark (1973) pour une explication sous-jacente dans le cadre de l'hypothèse de mixture de distributions et de processus de volatilité subordonné, et, Ané et Geman, 2000, pour différentes alternatives quantifiant le contenu informationnel des transactions – volume, nombre, intensité...

⁹ Toutes les estimations ont été réalisées sur le logiciel MatLab 7.8.

4. Résultats empiriques

Afin d'illustrer notre approche, nous avons choisi de former un portefeuille investi pour sa partie risquée dans l'indice américain *S&P500*. La part investie en actif non risqué est placée au taux monétaire américain au jour le jour. Notre échantillon commence le 4 janvier 1993 et se termine le 16 janvier 2008. Après avoir estimé les différentes spécifications des modèles de centiles conditionnels présentées dans la section III, nous choisissons le modèle qui minimise, sur la période d'estimation, la valeur associée à la fonction de régression sur quantile (Cf. équation 10). L'incorporation au modèle de base retenu de différents indicateurs avancés nous permet alors d'améliorer la qualité de l'estimation de notre multiple conditionnel. Nous utilisons les 2 787 premiers points des séries de prix, de volume, du *range*, et du *VIX* pour estimer le multiple variable¹⁰, et les derniers points pour tester le modèle de multiple conditionnel avancé¹¹.

Graphique 1. Rendements quotidiens du *S&P500* sur les périodes d'estimation et de test



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures du *S&P500* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs.

Le tableau 1 présente les résultats de nos estimations. Nous constatons que le paramètre associé au terme autorégressif est significatif quel que soit le modèle considéré¹². Ce paramètre possède par ailleurs une valeur élevée pour les trois premiers modèles. Ceci illustre le fait que le phénomène de dépendance des volatilités des rendements est élevé, même dans les queues de

¹⁰ Le *Volatility Index*® (*VIX*® en abrégé) est l'indice de volatilité implicite extrait des options à la monnaie à 30 jours échangées sur le *S&P500* sur le marché de Chicago (*CBOE*). Introduit en 1993, il est souvent considéré comme un bon *proxy* de l'anticipation du marché à court terme de la volatilité instantanée future de l'indice *S&P500* (Cf. Corrado et Miller, 2005).

¹¹ Notre période d'estimation comprend des rendements fortement négatifs pour l'actif risqué comme par exemple lors de la crise asiatique de 1997-1998, l'écroulement de la bulle Internet en 2000, ou de la crise liée aux attentats du 11 septembre 2001.

distribution. Par ailleurs, si la probabilité de « dépasser » le premier centile conditionnel est par construction proche de 1% sur la période d'estimation, cette dernière apparaît négligeable sur la période de test.

Les graphiques A.1, A.2 et A.3 en annexe représentent, sur la période d'estimation, l'opposé du rendement quotidien du *ScP500* et l'opposé du centile, estimé respectivement par les modèles de type « *Indirect GARCH* », à sensibilité symétrique, et à sensibilité asymétrique. Pour ces trois modèles, les évolutions du centile semblent visuellement bien estimés : les dépassements ne sont pas groupés et ils ont des amplitudes variables. Ces trois modèles semblent donc bien adaptés pour décrire la dynamique du centile des rendements du *ScP500*. Les modèles de centile conditionnel à sensibilité symétrique et de type « *Indirect GARCH* » dépendent des variations absolues de l'actif risqué. Cependant, lorsqu'on rapproche les résultats des modèles à sensibilité symétrique et « *Indirect GARCH* » d'un côté, et de l'autre les résultats obtenus pour le modèle de centile conditionnel à sensibilité asymétrique, le premier centile conditionnel des rendements journaliers du *ScP500* semble caractérisé par un comportement de type asymétrique. L'occurrence de rendements fortement négatifs explique une grande part de la variation du premier centile conditionnel, alors que les rendements positifs possèdent une influence faiblement significative sur la dynamique du quantile. Lorsque le *ScP500* présente un rendement fortement négatif, le centile diminue. Par contre, les rendements positifs ont relativement moins d'impact sur sa dynamique. Le modèle à sensibilité asymétrique semble donc bien adapté aux périodes de fortes volatilités où des rendements fortement positifs et négatifs se succèdent et où le quantile conditionnel reste bas.

Le centile adaptatif apparaît quant à lui, sur notre échantillon, être le modèle qui explique le moins bien le premier centile des rendements quotidiens du *ScP500* (la fonction objectif de la régression sur quantile prenant ici sa valeur la plus élevée). Si ce dernier modèle possède l'avantage de réduire la probabilité que l'on surestime de manière répétée et successive le premier centile conditionnel, celui-ci ne saurait cependant, par construction, empêcher la sous-estimation des quantiles extrêmes. Ainsi nous observons sur le graphique A.4 présenté en annexe (qui décrit les évolutions de l'opposé du centile estimé par le modèle adaptatif et de l'opposé du rendement quotidien du *ScP500*) que le centile estimé par la méthode adaptative augmente régulièrement et lentement avec le temps sauf lorsque le rendement du sous-jacent risqué est inférieur au centile. Cette nouvelle information est alors prise en compte, et le centile diminue brutalement. La

¹² Le paramètre du terme autorégressif est noté β_1 pour le modèle adaptatif et β_2 pour les autres modèles.

spécification adaptative ne permet donc pas d'anticiper les variations ; elle se contente de les subir. Ce comportement particulier nous amène à ne pas retenir par la suite cette spécification.

Tableau 1. Résultats des estimations des quatre modèles de base de centiles pour le *S&P500* pour la période 2003-2008

Les quatre modèles de premier centile conditionnel s'écrivent respectivement :				
	$\begin{cases} C_{SVA_t}(r_t; \beta_t) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times C_{SVA_{t-1}}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) + \beta_{3,t} \times r_{t-1} \\ C_{PA_t}(r_t; \beta_t) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times C_{PA_{t-1}}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) + \beta_{3,t} \times \max(0, r_{t-1}) + \beta_{4,t} \times [-\min(0, r_{t-1})] \\ C_{IG_t}(r_t; \beta_t) = \left\{ \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times [C_{IG_{t-1}}(r_{t-1}; \beta_{t-1})]^2 + \beta_{3,t} \times r_{t-1}^2 \right\}^{1/2} \\ C_{At}(r_t; \beta_t) = C_{At-1}(r_{t-1}; \beta_{t-1}) + \beta_{1,t} \left[1 + \exp \left\{ 0,5 \times [r_{t-1} - C_{At-1}(r_{t-1}; \beta_{t-1})] \right\} \right]^{-1} - 0,01 \end{cases}$			
avec r_{t-1} , le rendement quotidien (de l'actif sous-jacent risqué) de la veille.				

	<u>Modèle 1</u>	<u>Modèle 2</u>	<u>Modèle 3</u>	<u>Modèle 4</u>
	<i>-Valeurs absolues-</i>	<i>-Asymétrique-</i>	<i>-Indirect GARCH-</i>	<i>-Adaptatif-</i>
β_1	0,07	0,13	0,10	0,24
Ecart-type	0,03	0,04	0,04	0,11
P-statistique	0,83%	0,00%	1,00%	1,30 %
β_2	0,96	0,91	0,94	-
Ecart-type	0,02	0,03	0,01	
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	
β_3	0,09	(-0,07)	(0,27)	-
Ecart-type	0,04	0,06	0,42	
P-statistique	1,21%	11,76%	25,95%	
β_4	-	- 0,16	-	-
Ecart-type		0,05		
P-statistique		0,00%		
RQ	98,34	94,46	97,36	99,45
<i>Hits In-sample</i>	0,93%	0,96%	0,97%	1,11%
<i>Hits Out-of-sample</i>	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Perte cumulée (USD)	25,83	25,15	25,64	27,40
Perte maximale (USD)	4,58	4,08	4,58	4,65

Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures du *S&P500* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. Les paramètres entre parenthèses sont non-significatifs au seuil de 5%. Les valeurs significatives présentées dans ce tableau ont été recalculées en ne tenant compte que des termes significatifs. $RQ(.)$ est la valeur associée à la fonction objectif de la régression sur quantile.

Sur notre échantillon, le modèle de centile conditionnel à sensibilité asymétrique présente la valeur associée à la fonction objectif la plus petite¹³. Il apparaît, de plus, particulièrement bien adapté aux périodes de forte volatilité. C'est pourquoi nous avons choisi de retenir par la suite cette dernière spécification comme modèle de base lors de l'établissement du multiple conditionnel.

¹³ Les résultats des estimations des modèles présentés sont néanmoins trop similaires pour tenter à *a priori* de les distinguer. Nous ne prétendons pas ici pouvoir différencier de façon catégorique les différents modèles et nous contentons ici de présenter quelques alternatives qui s'avèrent donner des résultats acceptables et relativement

Afin d'améliorer la qualité de l'estimation du multiple conditionnel, nous augmentons dans un second temps la spécification asymétrique du centile par l'ajout de différents indicateurs avancés. Les spécifications des modèles de multiples asymétries conditionnelles avancées, notés C_{PA1t} , C_{PA2t} et C_{PA3t} , dépendent ainsi - en plus des variables significatives, respectivement, du rapport entre le cours le plus haut et le bas constaté lors de la dernière journée de cotation du *S&P500*, de la volatilité implicite extraite du marché américain des options sur actions et du volume échangé sur les actions composant le *S&P500*. Sont représentées sur les graphiques A5, A6, A7 situés en annexe 1 les évolutions sur la période d'estimation, des valeurs du centile conditionnel obtenues pour chacune des trois spécifications du modèle avancé asymétrique du premier centile conditionnel.

Nous avons également représenté dans le tableau 2 (*Cf.* ci-dessous) les résultats des estimations obtenus sur la période d'étude pour la meilleure spécification avancée du premier centile : à savoir, la spécification autorégressive asymétrique qui utilise la partie négative des rendements et le *range* (spécification notée C_{PA1t}).

Rappelons que pour la spécification conditionnelle asymétrique retenue, le multiple-cible variable est déterminé empiriquement, tel que :

$$\hat{m}_t(\beta_t) = -[C_{PA1t}(r_t; \beta_t) + \hat{Q}_t(\alpha)]^{-1} \quad (11)$$

avec :

$$\hat{Q}_t(\alpha) = \underset{t=[1, \dots, \Gamma]}{\text{Min}} [r_t - C_{PA1t}(r_{t-1}; \beta_t)]$$

où $C_{PA1t}(\cdot)$ est la valeur associée à la spécification du premier modèle de centile conditionnel en t , en fonction des rendements négatifs et du *range* des rendements du sous-jacent risqué, $\hat{Q}_t(\alpha)$ représente l'excès de rentabilité maximal par rapport au premier centile conditionnel observé sur la période d'estimation, au seuil de significativité α , et Γ est le nombre total d'observations dans la période d'estimation, avec $t = [1, \dots, \Gamma] \subset [1, \dots, T]$.

similaires. Par la suite, pour simplifier notre présentation, nous retenons qu'une des spécifications présentées, sur un critère *ad hoc* et arbitraire d'ajustement.

Tableau 2. Résultat des estimations du centile asymétrique avancé pour le *S&P500* pour la période 2003-2008

Rappelons que les trois versions s'écrivent :

$$C_{PAit}(r_t; \beta_t) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \times C_{PAit-1}(r_{t-1}; \beta_t) + \beta_{3,t} \times \left[-\min(0, r_{t-1}) \right] + \beta_{4,t} \times z_{t-1}$$

Pour les modèles C_{PA1t} , C_{PA2t} et C_{PA3t} :

- z_{t-1} est le rapport entre le cours le plus haut et le plus bas de la dernière journée de cotation du *S&P500* ;
- z_{t-1} est la volatilité implicite extraite du marché américain des options sur actions ;
- z_{t-1} est le volume échangé des actions composant le *S&P500*.

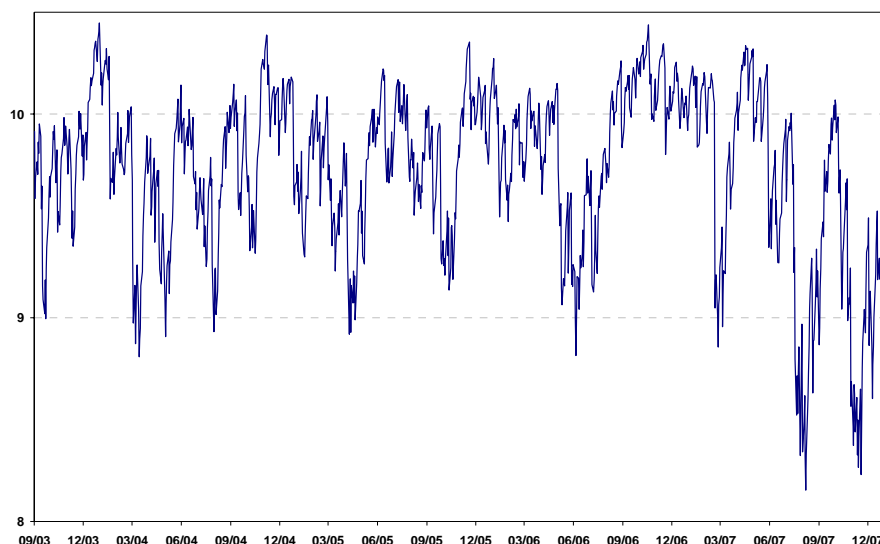
	C_{PA1t} - Range -	C_{PA2t} - VIX -	C_{PA3t} - Volume -
β_1	2,31	-7,31	-0,45
Ecart-type	0,18	3,53	0,19
P-statistique	0,00%	1,92%	0,87%
β_2	0,85	(-0,27)	0,95
Ecart-type	0,03	0,28	0,06
P-statistique	0,00%	17,17%	0,00%
β_3	-0,18	(-0,20)	(0,04)
Ecart-type	0,05	0,17	0,05
P-statistique	0,03%	10,98%	20,02%
β_4	-0,40	3,60	0,03
Ecart-type	0,03	0,83	0,02
P-statistique	0,00%	0,00%	6,82%
RQ	90,07	90,51	95,97
Hits In-sample	0,93%	0,93%	0,97%
Hits Out-of-sample	0,20%	0,60%	0,00%
Perte maximale (USD)	4,17	4,07	4,68
Perte cumulée (USD)	21,57	18,58	26,08

Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum, volume quotidien de transactions pour le *S&P500*, et volatilité implicite issue du marché des options sur actions américaines *VIX* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. Les paramètres entre parenthèses sont non-significatifs au seuil de 5%. Les valeurs significatives présentées dans ce tableau ont été recalculées en ne tenant compte que des termes significatifs. *RQ(.)* est la valeur associée à la fonction objectif de la régression sur quantile.

Comme le montre le graphique 2 (ci-dessous), le multiple conditionnel asymétrique avancé calculé à partir du *range* du *S&P500*, varie sur notre période de test entre 8,1 à 10,5 avec une valeur moyenne de 9,7 et un écart-type de 0,4. Si ce dernier possède un niveau en moyenne comparable avec les multiples inconditionnels qui sont utilisés par les praticiens (de l'ordre de 4 à 9), il peut également atteindre dans certaines configurations de marché un niveau comparable avec les multiples inconditionnels estimés par la théorie des valeurs extrêmes. Le multiple inconditionnel *maximum* que nous envisageons dans notre étude est fixé arbitrairement à 13. Cette valeur est certes bien plus élevée que les multiples que l'on pourrait trouver dans la pratique, mais c'est une valeur cohérente avec la pire perte possible, obtenue à partir de l'estimation des paramètres d'une loi des extrêmes sur le marché américain (Cf. Bertrand et Prigent, 2002). Bien que très élevée et peu réaliste pour des applications pratiques usuelles, cette valeur « extrême »

nous sert néanmoins de cas limite dans la suite. Ainsi, la performance du portefeuille assuré *via* un multiple conditionnel dépend, bien évidemment, de l'évolution du rendement de l'actif sous-jacent risqué.

Graphique 2. Evolution du multiple conditionnel asymétrique avancé estimé sur le *S&P500* sur la période 2003-2008



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *S&P500* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs.

La méthode de Cappiello *et alii* (2005) nous permet de visualiser les co-mouvements des rendements de deux portefeuilles. Cette représentation graphique, appelée « boîte de co-mouvements », est illustrée dans notre cas par le graphique 3 (ci-dessous). L'axe des ordonnées correspond aux probabilités conditionnelles associées aux quantiles des rendements du portefeuille à multiple conditionnel, conditionnellement aux réalisations de l'autre portefeuille soumis à comparaison. L'axe des abscisses représente la probabilité α associée aux quantiles des rendements des portefeuilles à comparer. Le graphique 3 illustre ainsi la probabilité que le rendement du portefeuille à multiple conditionnel soit inférieur à son (propre) α -quantile conditionnellement au fait que le rendement du portefeuille de multiple 13 soit lui aussi en dessous de son (propre) α -quantile, quand le seuil α est inférieur à 50%. Quand α est supérieur à 50%, nous représentons alors la probabilité que le rendement du portefeuille conditionnel soit supérieur à son quantile quand celui du portefeuille inconditionnel est au-dessus de son quantile.

Les trois cas polaires sont représentés à titre indicatif (sur le graphique 3). La droite d'ordonnée 100% (en trait épais) représente une corrélation parfaite entre les rendements des deux portefeuilles ; la probabilité que le rendement du premier portefeuille appartienne au même

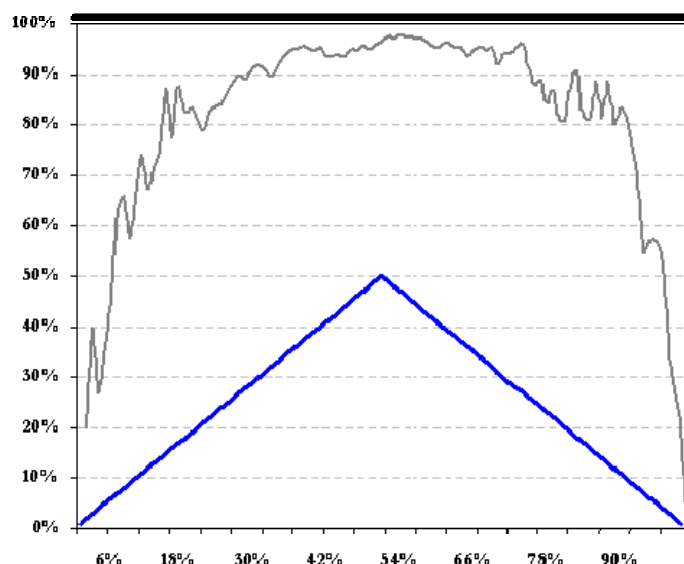
quantile que le rendement du deuxième portefeuille est toujours dans ce cas de 100%. Ainsi en particulier, quand le rendement du portefeuille inconditionnel est extrême, la rentabilité du portefeuille conditionnelle l'est aussi. Le « triangle » - en trait gris - illustre lui une indépendance parfaite entre les rendements des deux portefeuilles comparés ; en effet, la probabilité que les rendements des deux portefeuilles appartiennent au même quantile est ici exactement égale à α %. Ainsi, les co-mouvements extrêmes ne sont pas liés : la densité inconditionnelle ne se distingue pas de la densité conditionnelle, et la probabilité conditionnelle du portefeuille est indépendante des réalisations sur le portefeuille inconditionnel. Nous représentons enfin la droite d'ordonnée 0%, qui indique une anti-corrélation parfaite entre les rendements des deux portefeuilles ; la probabilité que le rendement du premier portefeuille soit inférieur à son quantile quand le second l'est aussi est nulle ; ainsi, les portefeuilles réagissent de manière anti-symétrique et leurs co-mouvements varient en sens opposés.

Le graphique 3 permet ainsi d'analyser visuellement les co-mouvements des rendements des portefeuilles à multiple conditionnel et inconditionnel de valeur 13, nous constatons que les rentabilités du portefeuille à multiple conditionnel sont très faiblement liées à celles du portefeuille à multiple 13 lorsque les rentabilités sont très basses (premier décile de la distribution des rendements) ou très hautes (5 derniers centiles), mais que la corrélation entre les rendements des deux portefeuilles est importante pour les valeurs médianes de rendements. Autrement dit, les comportements des deux portefeuilles seront similaires dans la plupart des cas, mais très différents parfois dans les périodes de rentabilités extrêmes (où la protection s'exercera effectivement). Le portefeuille protégé avec un multiple conditionnel calculé à partir du *range* et de la spécification asymétrique, est donc fortement dépendant de l'évolution du rendement du *S&P500*, sauf quand celui-ci connaît des rendements « anormalement » négatifs.

Après avoir estimé le multiple conditionnel, nous évaluons maintenant l'intérêt de notre approche en comparant les performances de la stratégie de gestion à coussin variable avec celles obtenues dans le cadre d'une stratégie de gestion à coussin constant de type *CPPI* sur le *S&P500* depuis septembre 2003. Pour une meilleure lisibilité, nous avons choisi de comparer la stratégie d'assurance de portefeuille à coussin variable fondée sur la spécification asymétrique avancée (équation 11) avec trois stratégies de gestion à coussin particulières : la stratégie inconditionnelle qui atteint la plus grande valeur à la fin de la période de test (rendement maximum *ex post*), la stratégie de gestion à multiple constant déterminée par la théorie des valeurs extrêmes, et la stratégie de gestion à coussin la moins risquée *ex ante*. Ces dernières correspondent sur notre

échantillon respectivement aux portefeuilles à coussin inconditionnel à multiples cibles constants de 3, 13 et 1.

Graphique 3. Boîte de co-mouvements entre les rendements du portefeuille à multiple conditionnel par rapport aux rendements du CPPI à multiple constant de valeur 13 pour le S&P500 sur la période 2003-2008

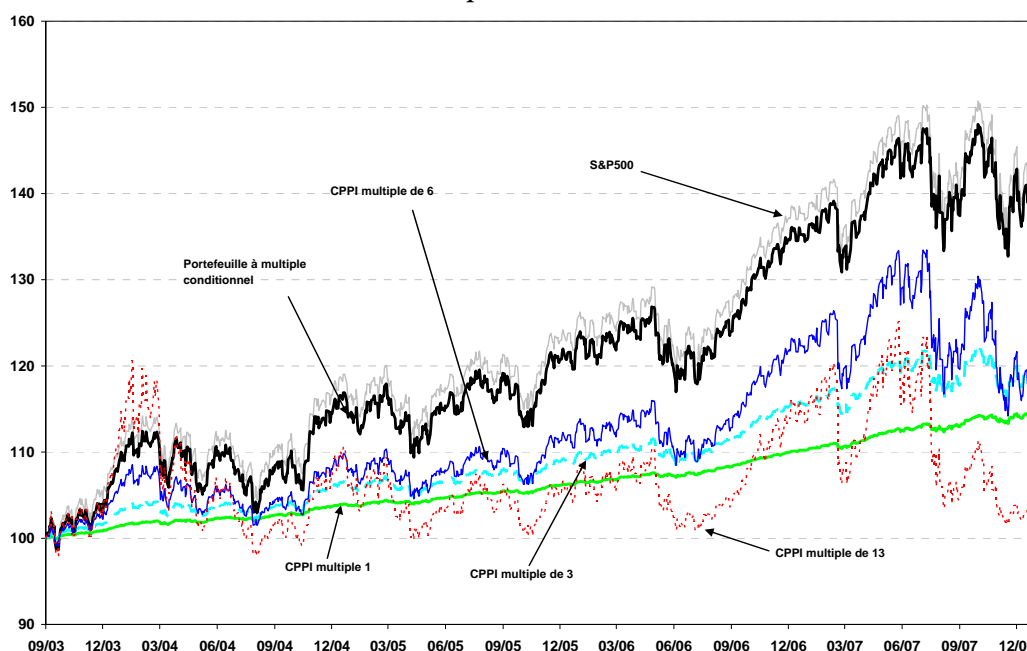


Source : Bloomberg, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du S&P500, du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs d'après Cappiello *et alii* (2005). Sur ce graphique on représente (sur la courbe grise) le quantile conditionnel des rendements du portefeuille à coussin à multiple conditionnel sachant le quantile des rendements du portefeuille à coussin de multiple 13. Le « triangle » indique une indépendance parfaite entre les rendements des deux portefeuilles à coussin. La droite d'ordonnée 100% représente une corrélation parfaite des rendements des deux portefeuilles. Enfin la droite d'ordonnée 0% indique une corrélation nulle entre les deux portefeuilles.

Le graphique 4 (ci-dessous) représente l'évolution de ces portefeuilles à coussin sur le S&P500 depuis septembre 2003. La stratégie d'assurance par multiple conditionnel domine la plupart du temps les stratégies d'assurance de portefeuille inconditionnelle. Au terme de la période de test, le portefeuille à coussin géré par le multiple avancé asymétrique possède en effet la valeur la plus élevée : il rapporte ainsi 6,05% par an sur la période de test, alors que la meilleure stratégie inconditionnelle ne rapporte que 3,26% par an, et que les méthodes de couverture inconditionnelles ne rapportent en moyenne que 1,90% par an sur la même période. Le sous-jacent risqué du portefeuille à coussin, l'indice S&P500, rapporte quant à lui 6,49% par an sur la période de test. Le coût absolu de l'assurance par le multiple conditionnel avancé asymétrique est ainsi sur cette période plus faible que celui associé aux différentes méthodes inconditionnelles d'assurance à coussin (*i.e.* la différence entre la rentabilité du sous-jacent risqué et celle du portefeuille assuré s'établit à 0,44 % pour la stratégie de gestion à coussin variable contre, respectivement, 3,23% et 6,27% pour les portefeuilles assurés avec des multiples cibles constants de 3 et 13).

Les volatilités des trois portefeuilles assurés sont par ailleurs inférieures à la volatilité du sous-jacent risqué. Le portefeuille *CPPI* de multiple 1 est bien entendu, celui qui possède, sur la période de test, la volatilité la plus basse. Ce dernier atténue en effet au mieux le mouvement du sous-jacent risqué alors que le portefeuille *CPPI* de multiple 13 possède quant à lui une volatilité annualisée relativement élevée sur l'ensemble de la période de test (15,61%).

Graphique 4. Valeurs des portefeuilles assurés à multiple conditionnel et inconditionnels (1, 3, 6 et 13) pour le *S&P500* sur la période 2003-2008



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *S&P500* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. Sont représentées sur ce graphique : les valeurs du *S&P500* (en trait gris clair fin), les valeurs de quatre portefeuilles à coussin à multiples constants 1, 3, 6 et 13 (en traits continu épais, fin, pointillés gras et pointillés fins), et la valeur du portefeuille à coussin avec multiple conditionnel (en trait épais continu).

Le portefeuille à multiple conditionnel asymétrique avancé (équation 11) domine également sur la période de test les portefeuilles à multiples inconditionnels en terme de rapport rendement/risque, avec un ratio de Sharpe de 0,28 contre respectivement 0,12 et -0,16 pour les portefeuilles *CPPI* avec multiple cible de 3 et de 13. On remarque par ailleurs que les coefficients d'asymétrie des rendements des portefeuilles assurés sont ici tous différents de zéro, et les tests de normalité confirment que les distributions de ces rendements ne sont pas normales. Bien qu'étant un indicateur de référence (Sharpe, 1994), l'utilisation du seul ratio de Sharpe pour juger de la pertinence de la stratégie est insuffisante, notamment en raison de l'asymétrie des rendements créée par la stratégie assurantielle. Bien que le moment d'ordre 2 puisse toujours s'interpréter comme une mesure de la dispersion associée à la distribution sous-jacente, la non-normalité des séries de rendements issues des stratégies de protection nous conduit en effet à une certaine prudence d'interprétation et à compléter l'analyse comparative des différents ratios de Sharpe en utilisant des mesures de performance complémentaires. Nous avons ainsi aussi calculé

le ratio de Sortino (avec pour référence la moyenne des rendements), la mesure Omega (avec un rendement seuil arbitrairement fixé à zéro) et la mesure Kappa d'ordre 3 (pour tenir compte de l'asymétrie des rendements des stratégies étudiées), mesures qui généralisent le ratio de Sharpe dans les cas de distributions non-gaussiennes.

En effet, le ratio de Sortino est un ratio de Sharpe modifié qui substitue la semi-volatilité à la volatilité au dénominateur du ratio (Sortino et van der Meer, 1991). En cas d'asymétrie de la distribution des rendements, le ratio de Sortino permettra ainsi de renormer le rendement excédentaire par une mesure de risque plus en lien avec les pertes potentielles de l'investisseur (rendements inférieurs à la moyenne). La mesure de performance Omega, introduite par Keating et Shadwick (2002), est quant à elle définie comme le rapport entre l'aire sous la fonction de répartition des rendements au dessus et celle en dessous d'un certain seuil de rendement. Une mesure Omega plus élevée signifiera que la densité de rendement est plus « importante » au dessus du seuil qu'en dessous. Le ratio défini prend donc en considération l'asymétrie, mais aussi l'aplatissement de la densité des rendements de la stratégie étudiée, au travers d'une mesure synthétique de l'ensemble des caractéristiques de la distribution de rendements de la stratégie analysée. Enfin, la mesure de performance Kappa, introduite par Kaplan et Knowles (2004), utilise une mesure de risque plus générale ; le ratio de Sortino est équivalent à une mesure Kappa d'ordre 2, et la mesure Omega est égale à l'unité plus la mesure Kappa d'ordre 1. La mesure Kappa d'ordre n sera le rapport entre le rendement excédentaire par rapport à un seuil de rendement et le semi-moment d'ordre n par rapport à ce seuil.

Ainsi, la comparaison du ratio de Sortino (Sortino et van der Meer, 1991), de la mesure Omega (Keating et Shadwick, 2002 ; Bertrand et Prigent, 2006) et de la mesure Kappa placent le portefeuille à multiple conditionnel dans le premier quartile des stratégies à coussin testées (stratégie à multiple conditionnel, et les treize stratégies à multiple inconditionnel - de 1 à 13). La comparaison des fonctions de densité des rendements des portefeuilles assurés conditionnels et inconditionnels (Cf. graphiques 5 et 6) montre que la distribution des rentabilités du portefeuille assuré avec un multiple cible de 13 possède une queue de distribution à gauche beaucoup plus épaisse que celle de notre portefeuille à multiple conditionnel. Le portefeuille CPPI avec multiple de 3 est quant à lui caractérisé à la fois par une probabilité quasi-nulle de perte inférieure à 1,8% et un très faible taux de participation en cas de hausse du sous-jacent risqué (la probabilité de dépasser 1,5% étant ici proche de zéro). Ces observations sont illustrées par le graphique 7.a. Enfin, le portefeuille géré par le modèle de multiple conditionnel asymétrique avancé (équation 11) permet une adaptation très rapide de son exposition en actif risqué aux mouvements du marché (Cf. les graphiques 8.a et 8.b).

Tableau 3a. Caractéristiques financières des portefeuilles à coussin sur le *S&P500* sur la période 2003-2008

<i>S&P500</i> (09/2003-01/2008)	Actif risqué	Multiple variable	Multiple 1	Multiple 3	Multiple 6	Multiple 13
Rendement	0,06	0,06	0,03	0,03	0,02	0,00
Volatilité	0,12	0,12	0,01	0,05	0,11	0,16
<i>VaR</i> 99%	-0,02	-0,02	0,00	-0,01	-0,02	-0,03
<i>Skewness</i>	-0,33	-0,36	-0,46	-0,69	-0,97	-1,16
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<i>Kurtosis</i>	4,83	4,89	6,54	7,89	0,99	9,99
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Jarque-Bera	180,03	193,08	632,44	1221,78	1877,78	2563,73
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Kolmogorov-Smirnov	0,49	0,49	0,50	0,49	0,49	0,49
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Anderson-Darling	7,96	8,02	12,86	18,21	19,18	16,06
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Sharpe	0,31	0,28	0,23	0,12	-0,02	-0,16
Sortino	0,05	0,05	0,21	0,06	0,02	0,01
Omega	1,10	1,10	1,50	1,13	1,05	1,02
Kappa	0,03	0,03	0,14	0,04	0,01	0,00

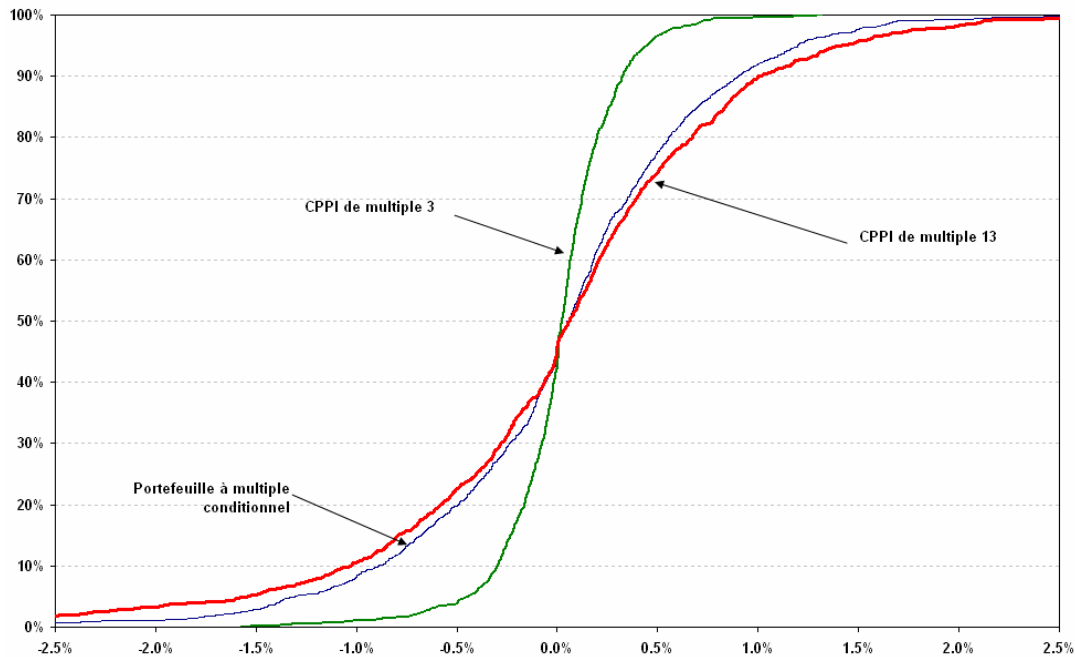
Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *S&P500* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. Les rendements et volatilités sont ici annualisés. La *VaR* indiquée dans chaque colonne est une *VaR* historique au seuil de 99%, calculée sur l'ensemble des rendements individuels annuels. Les P-statistiques des coefficients d'asymétrie (*Skewness*) et des indices d'aplatissement (*Kurtosis*) correspondent aux tests paramétriques de Pearson.

Tableau 3b. Caractéristiques financières des portefeuilles à coussin sur des séries "*bootstrappées*" sur le *S&P500* sur la période 2003-2008

<i>S&P500</i> (09/2003-01/2008)	Actif risqué	Multiple variable	Multiple 1	Multiple 3	Multiple 6	Multiple 13
Rendement	0,06	0,05	0,03	0,04	0,03	0,03
Volatilité	0,12	0,10	0,02	0,06	0,13	0,28
<i>VaR</i> 99%	-0,02	-0,02	0,00	-0,01	-0,02	-0,04
<i>Skewness</i>	-0,33	-0,25	-0,17	-0,27	-1,19	-1,53
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<i>Kurtosis</i>	4,83	14,34	8,15	37,60	152,89	257,63
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Jarque-Bera	1,80 10 ²	3,05 10 ⁵	6,31 10 ⁴	2,83 10 ⁶	5,32 10 ⁷	1,53 10 ⁸
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Kolmogorov-Smirnov	0,49	0,49	0,50	0,49	0,48	0,47
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Anderson-Darling	7,96	8,02	12,86	18,23	19,20	16,07
P-statistique	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Sharpe	0,31	0,45	0,22	0,16	0,05	0,00
Sortino	0,05	0,04	0,19	0,06	0,03	0,02
Omega	1,10	1,12	1,42	1,14	1,09	1,12
Kappa	0,03	0,03	0,12	0,03	0,01	0,01

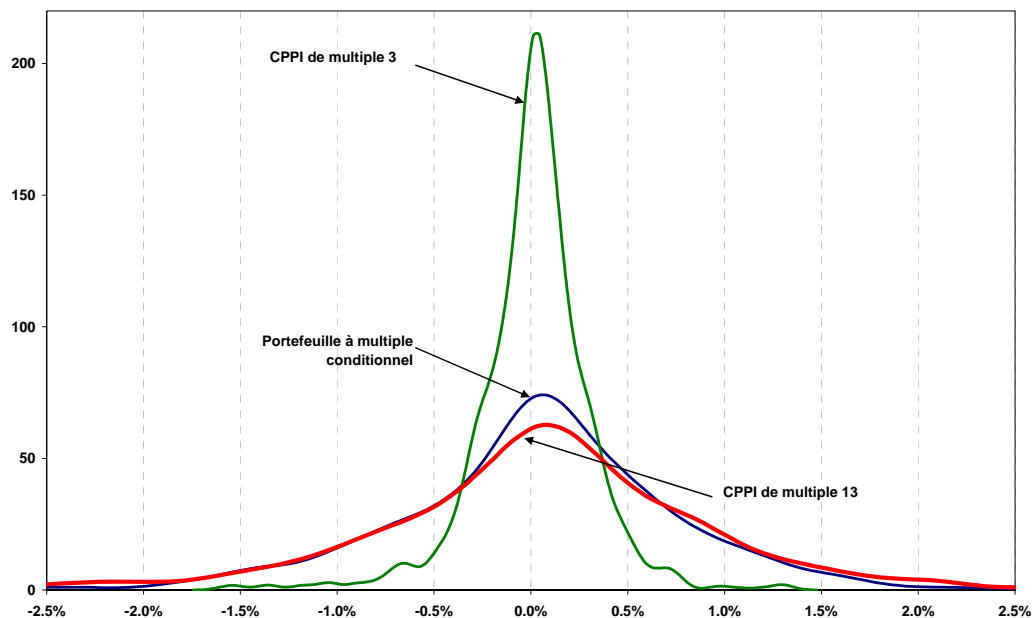
Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *S&P500* du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. Pour les projections, la méthode de simulation par *bootstrap* stationnaire est ici utilisée (Cf. Politis et Romano, 1994). Les projections sont fondées sur le tirage de 500 séries de 3921 rendements quotidiens. La taille des blocs de rendements est déterminée par une loi géométrique de paramètre 0,9. Les statistiques présentées ici représentent de simples moyennes arithmétiques des statistiques individuelles obtenues en appliquant les stratégies de protection à chacun des titres sur toute la période considérée. Les rendements et volatilités sont ici annualisés. La *VaR* indiquée dans chaque colonne est une *VaR* historique au seuil de 99%, calculée sur l'ensemble des rendements individuels annuels. Les P-statistiques des coefficients d'asymétrie (*Skewness*) et des indices d'aplatissement (*Kurtosis*) correspondent aux tests paramétriques de Pearson.

Graphique 5. Fonctions de répartition des rendements des portefeuilles à coussins à multiple conditionnel et multiples inconditionnels (3 et 13) sur le *S&P500* sur la période 2003-2008



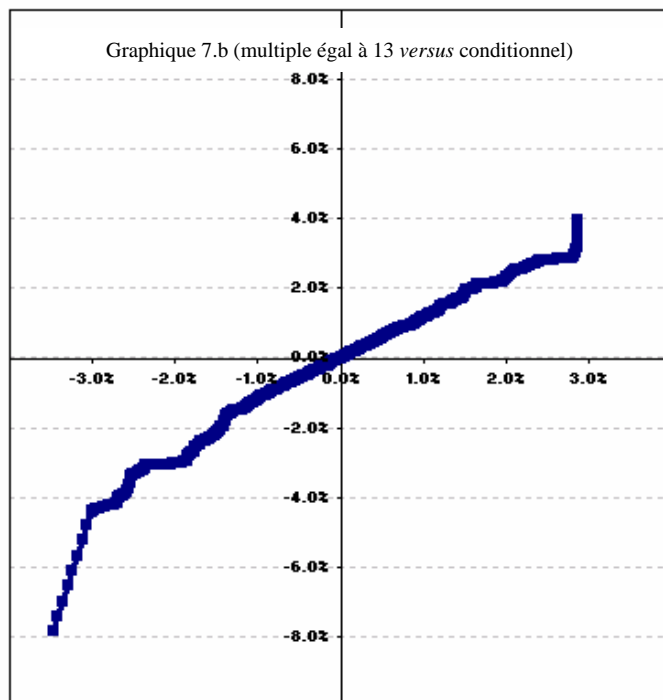
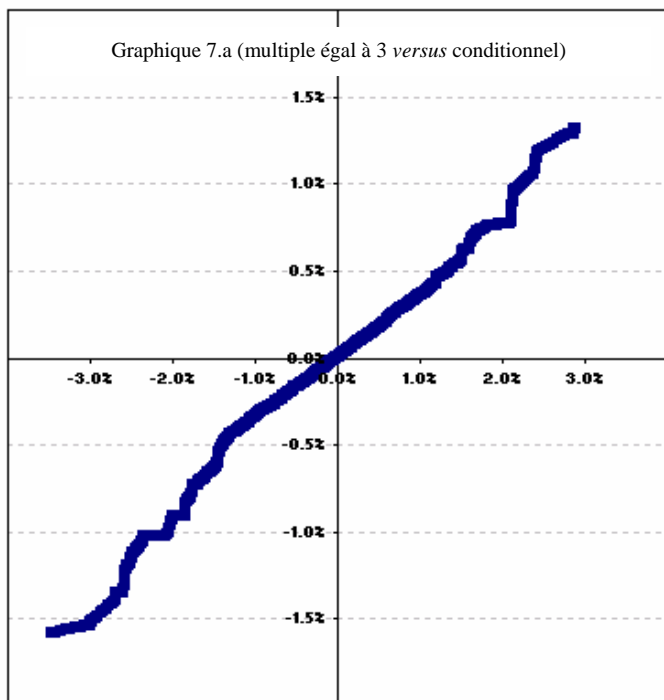
Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *S&P500*, du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calcul des auteurs. Les différentes courbes représentent les fonctions empiriques de répartition des stratégies comparées. La courbe tracée en continu fin représente ainsi la fonction de répartition des rendements du portefeuille à multiple conditionnel. La courbe tracée en trait épais représente la fonction de répartition des rendements du portefeuille de multiple 13, la courbe tracée en trait d'épaisseur moyenne représente la fonction de répartition des rendements du portefeuille de multiple 3.

Graphique 6. Estimations des fonctions de densité des rendements des portefeuilles à multiple cible variable et constants (3 et 13) sur le *S&P500* sur la période 2003-2008



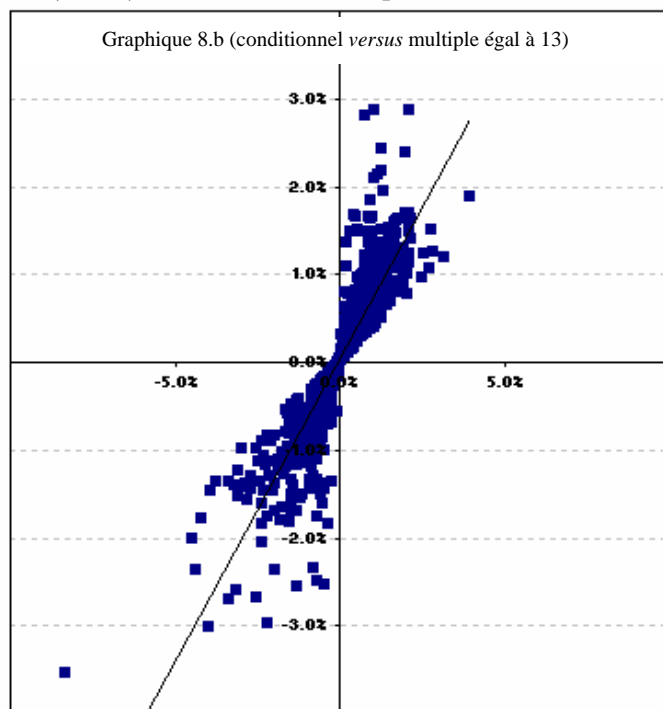
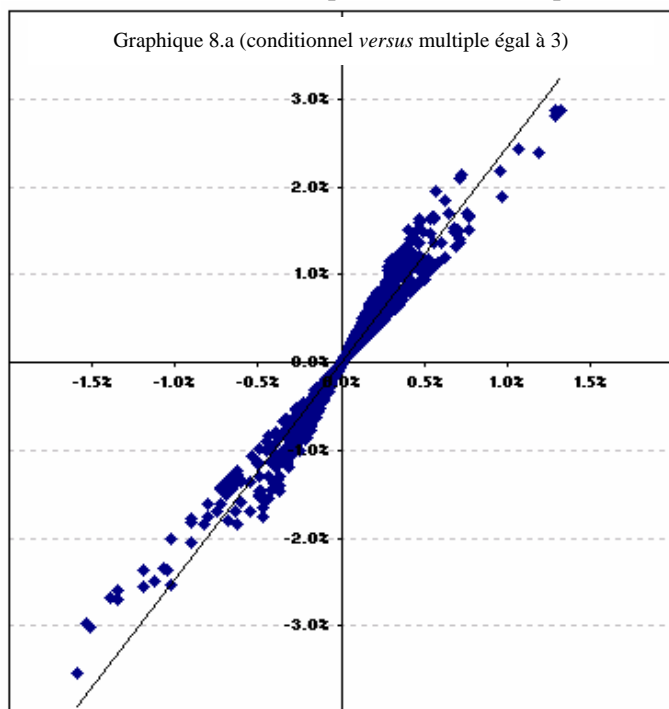
Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *S&P500*, du 05/01/1993 au 16/01/2008. Les densités non-paramétriques présentées sont estimées avec un noyau gaussien en utilisant le principe de validation croisée (Cf. Silverman, 1986). La courbe en pointillés fins représente la fonction de densité des rendements du portefeuille à coussin de multiple 3. La courbe tracée en continu représente la fonction de densité des rendements du portefeuille à multiple conditionnel. La courbe tracée en pointillés larges et épais représente la fonction de densité des rendements du portefeuille de multiple 13.

Graphiques 7. Droite de Henry (QQ-plot) des rendements des portefeuilles à multiples inconditionnels (3 et 13) par rapport aux rendements du portefeuille à multiple conditionnel sur le S&P500 sur la période 2003-2008



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du S&P 500, du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; fonctions de répartition empiriques, calculs des auteurs. En haut à gauche : distribution des rendements du CPPI de multiple 3 par rapport la distribution des rendements du CPPI à multiple conditionnel. En haut à droite : distribution des rendements du CPPI de multiple 3 par rapport à la distribution des rendements du CPPI à multiple conditionnel.

Graphiques 8. Rendements du portefeuille à multiple conditionnel par rapport aux rendements des portefeuilles à multiples inconditionnels (3 et 13) sur le S&P500 sur la période 2003-2008



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum du S&P500, du 05/01/1993 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. En bas à gauche : rendements du CPPI à multiple conditionnel par rapport aux rendements du CPPI de multiple 3. En bas à droite : rendements du CPPI à multiple conditionnel par rapport aux rendements du CPPI de multiple 13.

La $Var_{99\%}$ pour cette stratégie est, sur la période de test, inférieure à celle obtenue sur le portefeuille à multiple constant déterminé par la théorie des valeurs extrêmes (-2,35% contre -3,08%). S'il arrive que la valeur du portefeuille assuré par multiple variable baisse lorsque le sous-jacent risqué enregistre des rendements négatifs - notamment après une série de rendements positifs - celui-ci adapte très rapidement son exposition en période de hausse pour se retrouver en tête de classement par rapport aux autres stratégies de couverture inconditionnelles (Cf. sur le graphique 3 la période allant par exemple, de décembre 2003 à mars 2004).

L'approche retenue d'assurance de portefeuille à multiple conditionnel semble donc - sur la période de test et sur l'actif considéré (*S&P500*) - plus efficiente (*i.e.* moins coûteuse, pour un risque limité) que les méthodes d'assurance de portefeuille classiques inconditionnelles.

Après avoir détaillé les résultats sur séries historiques directement liées aux « vraies » évolutions des différentes phases du marché (*trends*, retournements...), nous avons complété ceux-ci en réalisant les mêmes comparaisons en utilisant des simulations extensives de type *bootstrap* stationnaire (Politis et Romano, 1994) à partir des séries correspondantes du *S&P500*. L'utilisation du *bootstrap* stationnaire nous permet, en effet, de conserver au mieux la structure de dépendance des séries étudiées¹⁴. Nous comparons ainsi les portefeuilles à multiples conditionnel et inconditionnels dans le tableau 3.b. Le portefeuille conditionnel se classe ainsi premier suivant le ratio de Sharpe sur 500 simulations effectuées, et dans le premier quartile pour toutes les autres mesures de risques. Le portefeuille à multiple conditionnel devance ainsi la plupart des portefeuilles à multiple inconditionnel¹⁵.

A titre d'illustration finale, nous avons également estimé le multiple conditionnel, sur le marché des actions américaines en dynamique depuis le 1^{er} janvier 1937, pour un portefeuille assuré dont la poche risquée est investie dans l'indice Dow Jones. La série considérée ici (le *DJIA* entre 1937 et 2008) est ainsi particulièrement longue (18 554 rendements journaliers) et elle permet de juger des performances de la stratégie conditionnelle dans de très nombreuses situations de marché (haussier, éclatement de bulles, crises soudaines et violentes, périodes incertaines, volatilité haute et régime de faible volatilité, *etc*). De plus, cette série rend compte des évolutions des principaux titres du principal marché actions du monde ; elle a donc un certain

¹⁴ Le tirage puis la recombinaison aléatoire de blocs de tailles variables (la taille des blocs suit une loi géométrique) permet de constituer une infinité de séries à partir de la série historique originelle tout en conservant au mieux la structure d'auto-corrélation de la série de départ.

¹⁵ Nous avons également réalisé ces estimations sur l'indice CAC40 depuis sa création ; sur le marché français les conclusions générales s'avèrent être très similaires.

caractère représentatif et « universel ». Ensuite et surtout, pour renforcer la robustesse de nos conclusions, plusieurs stratégies ont été initiées depuis le début de la série et les résultats agrégés sont renseignés dans le tableau 4. Pour construire cette table, nous avons en effet, depuis la première date de l'échantillon, regardé ce qu'auraient donné des portefeuilles lancés tous les vingt jours pour une durée de trois ans. Le tableau 4 regroupe ainsi un très grand nombre de tests de stratégies, avec des points de départs différents (au total 890 départs consécutifs, pour 3 710 estimations recoupant 18 554 observations). Les paramètres du modèle sont estimés chaque semaine avec un horizon d'investissement de trois ans pour établir la garantie du capital initial. On constate que le multiple conditionnel asymétrique avancé (équation 11) varie sur cette période autour d'une valeur moyenne de 8,08.

Il apparaît, à la lecture du tableau 4, que le portefeuille à multiple conditionnel asymétrique retenu ne s'est monétarisé qu'une seule fois sur cette période, au bout de 50 ans et 8 mois. On remarque par ailleurs que seuls les portefeuilles *CPPI* de multiples inférieurs ou égaux à 4 ne se sont jamais totalement monétarisés sur la période, tous les autres portefeuilles ont été monétarisés au moins une fois (lors de la crise d'octobre 1987). Le portefeuille à multiple conditionnel obtient, en moyenne sur ce vaste échantillon, le ratio de Sharpe le plus élevé (ce qui confirme les résultats obtenus sur le *SC&P500* sur une période plus récente). La rentabilité excédentaire annualisée moyenne (ainsi que la chute maximale) de la stratégie conditionnelle est par ailleurs supérieure à celle correspondant à une stratégie de *CPPI* pour un multiple égal à 7, alors que la volatilité de ses rendements est proche de celle correspondant à un multiple fixé à 5. Nous voyons donc sur ce long échantillon que la stratégie conditionnelle domine en performance, en volatilité et en ratio de Sharpe une stratégie à multiple fixe de 6.

Ainsi, en comparant les résultats de la stratégie conditionnelle à un ensemble de stratégies inconditionnelles, nous avons bien sûr trouvé, *ex post*, quelques stratégies à multiple constant qui battent (sur certains critères) la stratégie à multiple variable. Mais ceci est un jugement *ex post*. Quel multiplicateur doit-on choisir *ex ante* ? Nous avons tenté de répondre ici à cette question en proposant par une approche flexible (variable) et systématique, qui autorise des expositions fortes quand le risque associé au sous-jacent risqué est faible, et qui limite l'exposition en actif risqué dans des situations turbulentes, en adaptant tout simplement la démarche usuelle de gestion des risques au cadre de l'assurance de portefeuille. L'analyse étendue de la stratégie systématique à multiple conditionnel (déterminée *ex ante*) donne ainsi des résultats intéressants car elle dépasse ou demeure très proche de la meilleure stratégie inconditionnelle déterminée *ex post* (une fois

connue l'évolution des rendements de l'actif risqué) quand on considère la plupart des critères classiques de comparaisons des stratégies financières.

Tableau 4. Analyse de la couverture de portefeuilles à multiple conditionnel et inconditionnels correspondant à de multiples départs mensuels sur le Dow Jones Index sur la période 01/1937-01/2008

<i>DJIA</i> (01/1937-01/2008)	Date de monétarisation définitive	Nombre de sous-estimation de la chute <i>maximale</i>	Sous-estimation de la chute <i>maximale</i>	Rendement excédentaire moyen annualisé	Volatilité annualisée moyenne
Multiple variable	19/10/1987	1	11,27%	1,43%	5,70%
Multiple 1	jamais	0	-	0,23%	0,97%
Multiple 2	jamais	0	-	0,35%	1,99%
Multiple 3	jamais	0	-	0,48%	3,06%
Multiple 4	jamais	0	-	0,62%	4,18%
Multiple 5	19/10/1987	1	2,61%	0,84%	5,40%
Multiple 6	19/10/1987	1	5,94%	1,04%	6,67%
Multiple 7	19/10/1987	1	8,32%	1,35%	8,06%
Multiple 8	19/10/1987	1	10,11%	1,63%	9,46%
Multiple 9	19/10/1987	1	11,50%	1,92%	10,95%
Multiple 10	19/10/1987	1	12,61%	2,21%	12,37%
Multiple 11	19/10/1987	1	13,52%	2,41%	13,84%
Multiple 12	19/10/1987	1	14,28%	2,43%	15,07%
Multiple 13	19/10/1987	3	14,92%	2,01%	16,06%

Source : *Bloomberg*, données hebdomadaires, prix de clôtures, cours minimum et maximum du *Dow Jones* du 02/10/1928 au 16/01/2008 ; calculs des auteurs. Les paramètres du modèle ont été estimés dynamiquement chaque semaine. Les rendements excédentaires sont calculés par rapport au taux sans risque et annualisés. Un horizon d'investissement de trois ans est utilisé. Les statistiques représentées ci-dessus correspondent aux caractéristiques moyennes d'un ensemble de portefeuilles (890 au total), d'horizon trois ans pour la garantie, qui sont lancés tous les mois depuis janvier 1937 pour chaque stratégie (chaque ligne du tableau). Les « dates de monétarisation définitive » reportées dans le tableau correspondent ainsi à une monétarisation de l'ensemble des portefeuilles lancés antérieurement sur les trois années précédentes (de octobre 1984 à octobre 1987).

5. Conclusion

Le multiple cible constitue l'un des paramètres essentiels de la stratégie d'assurance de portefeuille à coussin. Plutôt que de tenter de déterminer un multiple *optimal* à partir de la chute historique *maximale* ou d'une spécification conditionnelle particulière de la volatilité, nous avons choisi de développer dans cet article une nouvelle méthode d'estimation du multiple fondée sur une modélisation autorégressive d'un quantile conditionnel extrême en utilisant la méthode de régression par quantile initiée par Koenker et Basset (1978). Nous avons par ailleurs également développé une version avancée du multiple conditionnel grâce à l'utilisation d'indicateurs retardés disponibles pour la majorité des titres cotés.

L'analyse étendue de la stratégie systématique à multiple conditionnel (déterminée *ex ante*), effectuée sur le marché des actions américaines, donne ainsi des résultats intéressants car elle dépasse ou demeure très proche de la meilleure stratégie inconditionnelle déterminée *ex post* (une fois connue l'évolution des rendements de l'actif risqué) quand on considère la plupart des critères classiques de comparaisons des stratégies financières. La stratégie de portefeuille assuré

par un multiple conditionnel à pente asymétrique avancé domine en effet la plupart du temps, hors échantillon, les portefeuilles assurés à multiples constants, notamment ceux estimés par la théorie des valeurs extrêmes (Cf. Bertrand et Prigent, 2002).

Parmi les directions de recherche futures, il semble intéressant d'étendre notre cadre d'analyse à des stratégies d'assurance de portefeuille plus générales. Ceci pourrait être réalisé en utilisant l'approche de maximisation de fonction d'utilité à aversion pour le risque mélangée sous contrainte de garantie optimale avec des options polynomiales (Cf. Cox et Huang, 1989, Caballé et Pomansky 1996, Macovschi et Quittard-Pinon, 2006, et Prigent et Tahar, 2006). Il serait également intéressant de généraliser notre approche en combinant la technique de régression sur quantile avec d'autres méthodes d'estimation dynamique telles que les quantiles paramétriques conditionnels, les régressions sur extrêmes, les expansions statistiques et les régressions sur quantile avec lissage exponentiel (Cf. Chernozhukov, 2005 et Taylor, 2008-a et 2008-b). Une première approche a été effectuée par Gouriéroux et Jasiak (2008) qui ont établi les conditions suffisantes de combinaison de quantiles avec le modèle à quantiles dynamiques additifs.

Une étude des performances relatives des différentes méthodes d'estimation conditionnelle des multiples serait aussi dans ce cadre riche d'enseignements. Il conviendrait aussi de tester plus avant le pouvoir prédictif des différentes estimations du multiple. Ceci supposera toutefois la mise au point d'un cadre de comparaison adéquate entre les différentes stratégies prenant en compte les préférences des agents et le caractère extrêmement dépendant des résultats au point de départ, à la fréquence d'estimation, à l'actif sous-jacent et à l'horizon de couverture.

Références bibliographiques

Anderson T. et D. Darling, (1952), « Asymptotic Theory of Certain 'Goodness of Fit' *Criteria* based on Stochastic Processes », *Annals of Mathematical Statistics* 23(2), 193-212.

Ané T. et H. Geman, (2000), « Order Flow, Transaction Clock and Normality of Asset Returns », *Journal of Finance* 55(5), 2259-2284.

Basak S., (1995), « A General Equilibrium Model of Portfolio Insurance », *Review of Financial Studies* 8(4), 1059-1090.

Basak S., (2002), « A Comparative Study of Portfolio Insurance », *Journal of Economic Dynamics and Control* 26(7), 1217-1241.

Berkelaar A., R. Kouwenberg et T. Post, (2004), « Optimal Portfolio Choice under Loss Aversion », *Review of Economics and Statistics* 86(4), 973-987.

Bertrand P. et J.-L. Prigent, (2002), « Portfolio Insurance: the Extreme Value Approach to the CPPI Method », *Finance* 23(2), 69-86.

Bertrand P. et J.-L. Prigent, (2005), « Portfolio Insurances Strategies: OBPI *versus* CPPI », *Finance* 26(1), 5-32.

Black F. et R. Jones, (1987), « Simplifying Portfolio Insurance », *Journal of Portfolio Management* 14(1), Fall, 48-51.

Black F. et A. Perold, (1992), « Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance », *Journal of Economic Dynamics and Control* 16(3), 403-426.

Caballé J. et A. Pomansky, (1996), « Mixed Risk Aversion », *Journal of Economic Theory* 71(2), 485-513.

Cappiello L., B. Gerard et S. Manganelli, (2005), « Measuring Comovements by Regression Quantiles », *Working Paper ECB*, 46 pages.

Campbell J. et J. Cochrane, (1999), « By Force of Habit: Consumption-based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior », *Journal of Political Economy* 107(2), 205-251.

Chen J. et C. Chang, (2005), « Dynamical Proportion Portfolio Insurance with Genetic Programming », in *Lectures Notes in Computer Science*, Springer Berlin, 735-743.

Chernozhukov V. et L. Umanstev, (2001), « Conditional Value-at-Risk: Aspects of Modelling and Estimation », *Empirical Economics* 26(1), 271-292.

Chernozhukov V., (2005), « Extremal Quantile Regression », *Annals of Statistics* 33(2), 806-839.

Clark P., (1973), « A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices », *Econometrica* 41(1), 135-155.

Corrado C. et T. Miller, (2005), « The Forecast Quality of CBOE Implied Volatility Indexes », *Journal of Futures Markets* 25(4), 339-373.

Coudert V. et M. Gex, (2008), « Does Risk Aversion Drive Financial Crises? Testing the Predictive Power of Empirical Indicators », *Journal of Empirical Finance* 15(2), 167-184.

Cox J. et C. Huang, (1989), « Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices follow a Diffusion Process », *Journal of Economic Theory* 49(1), 33-83.

Engle R. et T. Bollerslev, (1986), « Modelling the Persistence of Conditional Variances », *Econometric Reviews* 5(1), 1-87.

Engle R. et S. Manganelli, (2004), « CAViaR: Conditional AutoRegressive Value-at-Risk by Regression Quantiles », *Journal of Business and Economic Statistics* 22(4), 367-381.

Gomes F., (2005), « Portfolio Choice and Trading Volume with Loss-averse Investors », *Journal of Business* 78(2), 675-706.

Gouriéroux C. et J. Jasiak, (2008), « Dynamic Quantile Models », *Journal of Econometrics* 147(1), 198-205.

Jackson D., L. Hourany et N. Vidmar, (1972), « A Four-dimensional Interpretation of Risk Taking », *Journal of Personality* 40(3), 483-501.

Kahneman D. et A. Tversky, (1979), « Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk », *Econometrica* 47(2), 263-291.

Kaplan P. et J. Knowles, (2004), « Kappa: A Generalized Downside Risk-Adjusted Performance Measure », *Journal of Performance Measurement* 8(3), 42-54.

Keating C. et W. Shadwick, (2002), « A Universal Performance Measure », *Journal of Performance Measurement* 6(3), 59-84.

Kingston G., (1989), « Theoretical Foundations of Constant Proportion Portfolio Insurance », *Economics Letters* 29(4), 345-347.

Koenker R. et G. Basset, (1978), « Regression Quantiles », *Econometrica* 46(1), 33-50.

Kouretas G. et L. Zarangas, (2005), « Conditional AutoRegressive Value-at-Risk by Regression Quantiles: Estimating Market Risk for Major Stock Markets », *Working Paper*, University of Crete, 46 pages.

Leibowitz M. et S. Kogelman, (1991), « Asset Allocation under Shortfall Constraints », *Journal of Portfolio Management* 17(1), Winter, 18-23.

Li G., (2007), « Time-varying Risk Aversion and Asset Prices », *Journal of Banking and Finance* 31(1), 243-257.

Lucas A. et P. Klaassen, (1998), « Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation », *Journal of Portfolio Management* 25(1), 71-79.

Macovschi S. et F. Quittard-Pinon, (2006), « On the Pricing of Power and other Polynomial Options », *Journal of Derivatives* 13(1), Summer, 61-73

Parkinson M., (1980), « The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return », *Journal of Business* 53(1), 61-65.

Perold A. et W. Sharpe, (1988), « Dynamic Strategies for Asset Allocation », *Financial Analysts Journal* 51(1), January-February, 149-160.

Politis D. et J. Romano, (1994), « The Stationary Bootstrap », *Journal of the American Statistical Association* 89(428), 1303-1313.

Poncet P. et R. Portait, (1997), « Assurance de portefeuille », in *Encyclopédie des Marchés Financiers*, Simon Ed., *Economica*, 140-141.

Prigent J.-L., (2001), « Assurance du portefeuille : analyse et extension de la méthode du coussin », *Banque et Marchés* 51(1), 33-39.

Prigent J.-L. et F. Tahar, (2005), « CPPI with Cushion Insurance », *Working Paper Thema*, Université de Cergy, 22 pages

Prigent J.-L. et F. Tahar, (2006), « Optimal Portfolios with Guarantee at Maturity: Computation and Comparison », *International Journal of Business* 11(2), 171-185.

Roy A., (1952), « Safety-first and the Holding of Assets », *Econometrica* 20(3), 431-449.

Sharpe W., (1994), « The Sharpe Ratio », *Journal of Portfolio Management* 21(1), 49-58.

Sortino F. et R. van der Meer, (1991), « Downside Risk », *Journal of Portfolio Management* 17(4), 27-31.

Silverman B., (1986), « Density Estimation for Statistics and Data Analysis », in *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman & Hall Ed, 176 pages.

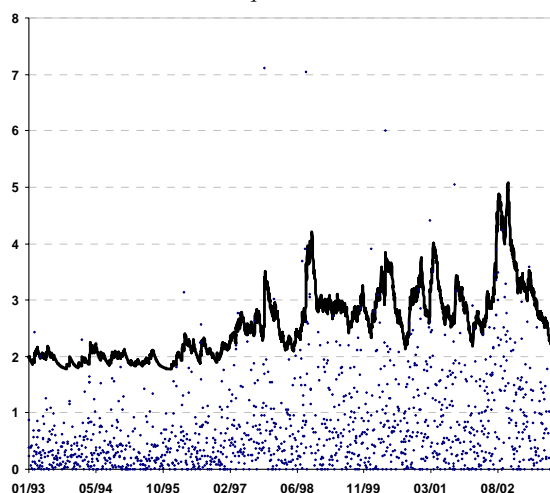
Taylor J., (2008-a), « Estimating Value-at-Risk and Expected Shortfall using Expectiles », *Journal of Financial Econometrics* 6(2), 231-252.

Taylor J., (2008-b), « Using Exponentially Weighted Quantile Regression to Estimate Value-at-Risk and Expected Shortfall », *Journal of Financial Econometrics* 6(3), 382-406.

Annexe 1 : Evolution des centiles suivant les différents modèles estimés

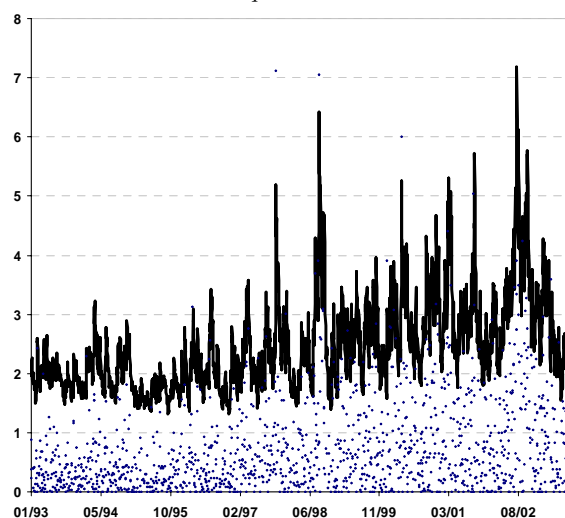
Graphique A1.

Opposé du centile estimé par le modèle 1
- Symétrique aux valeurs absolues -
et du rendement quotidien du S&P500



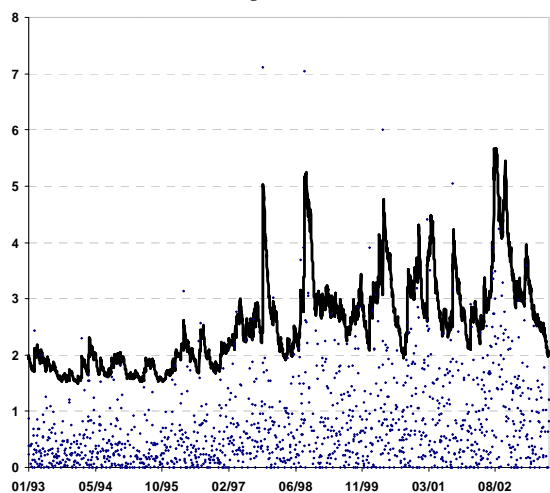
Graphique A2.

Opposé du centile estimé par le modèle 2
- Sensibilité asymétrique -
et du rendement quotidien du S&P500



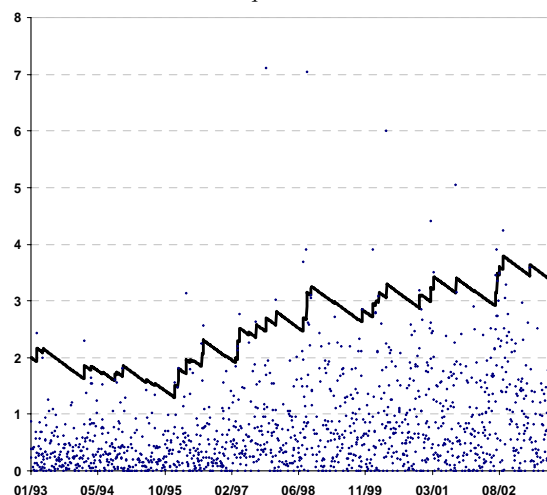
Graphique A3.

Opposé du centile estimé par le modèle 3
- Indirect GARCH -
et du rendement quotidien du S&P500



Graphique A4.

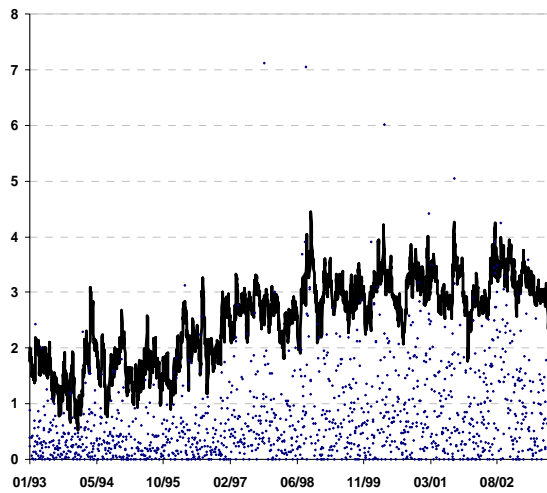
Opposé du centile estimé par le modèle 4
- Adaptatif -
et du rendement quotidien du S&P500



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures du S&P500 du 05/01/1993 au 10/08/2003 ; calculs des auteurs. Sont représentés sur ces graphiques : l'opposé des rendements du S&P500 et l'estimation des centiles selon les quatre modèles de base – Cf. équations (6), (7), (8) et (9).

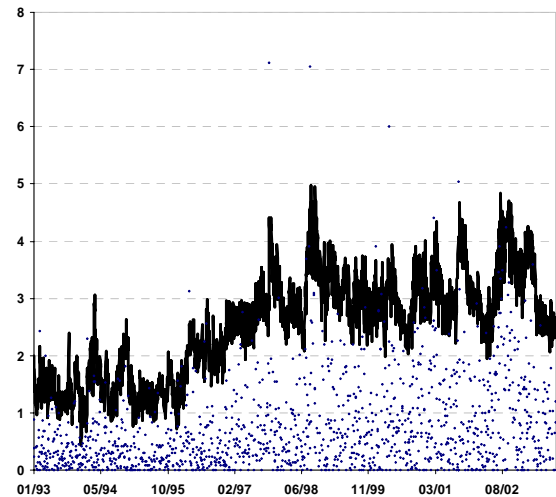
Graphique A5.

Opposé du centile estimé par le modèle 5
- Range -
et du rendement quotidien du *S&P500*



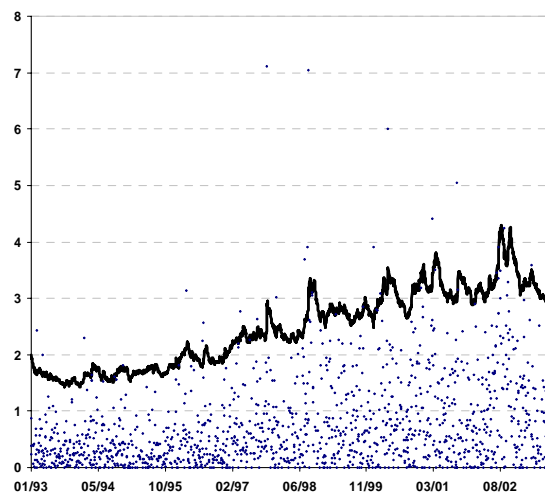
Graphique A6.

Opposé du centile estimé par le modèle 6
- Volatilité implicite -
et du rendement quotidien du *S&P500*



Graphique A7.

Opposé du centile estimé par le modèle 7
- Volume -
et du rendement quotidien du *S&P500*



Source : *Bloomberg*, données quotidiennes, prix de clôtures, cours minimum et maximum, volume quotidien de transactions pour le *S&P500*, et volatilité implicite mesurée par le *VIX* du 05/01/1993 au 10/08/2003 ; calculs des auteurs.